Індивідуальне завдання №8

**Метод Крилова**

На основі властивості квадратної матриці перетворювати на нуль свій характеристичний многочлен. Згідно тотожності Гамільтона-Келі, всяка квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена і відповідно, звертає його в нуль.

Нехай ,

D(α) = det(A-ƛE) = ƛn + p1ƛn-1 + p2ƛn-2 + pn (1)

характеристичний многочленматриці А.

Замінюючи в рівності (1) ƛ на матрицю А отримаємо:

An + p1An-1 + p2An-2 + pnE = 0 (2)

Візьмемо довільний вектор:

(3)

Помножимо обидві частини рівняння (2) з права на y0 :

Any0 + p1An-1y0 + p2An-2 + pny0 = 0 (4)

Позначимо матрицю А:

Ayk-1 = yk (k = 1, 2 , …, n)

Тобто, y1 = Ay0 ; y2 = Ay1 = A2y0 ; … yn = Ayn-1 = Any0

Після цього рівняння (4) :

yn + p1yn-1 + p2yn-2 + … + pny0 = 0 (5)

або

p1yn-1 + p2yn-2 + … + pny0 = - yn

Вматричному вигляді:

p1 + p2 + … + pn = -

Лінійна система:

p1y1n-1 + p2y1n-2 + … + pny10 = -y1n

p1y2n-1 + p2y2n-2 + … + pny20 = -y2n  (6)

…

p1ynn-1 + p2ynn-2 + … + pnyn0 = -ynn

Вматричному вигляді:

(7)

Координати початкового вектора у0 беруться довільно, якщо лінійна система (6) має єдине рішення, то корні р1 …рn являються коефіцієнтами многочлена. Рішення цієї системи може бути знайдено методом Гауса.

, (8)

де коефіцієнти можна обчислити за формулами:

 (9)

**Початкова матриця**

A =

у0 = 

Визначимо необхідні вектори

у1 = A \* у0 =\* = 

у2 = A \* у1 =\*=

у3 = A \* у2 =\*= 

Побудуємо систему

\*=

B-1 B P = B-1 \*

P = B-1 \*

Побудуємо матрицю із алгебраїчних доповнень, розділимо її на визначник початкової матриці і отримаємо зворотну матрицю.

1 / det (A) \* = R-1

Матриця алгебраїчних доповнень



Транспонована матриця



Визначник початкової матриці

det (A) = -22

Зворотна матриця

A-1 = -1/52 \* = 

Перевірка

\*= E

P =\* = 

Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо корні

ƛ3 - 14 ƛ2 - 20 ƛ + 2 = 0

Відокремимо корні аналітичним методом.

Знаходимо критичні точки. Перша похідна:  
f'(ƛ) = 3ƛ 2-28ƛ -20  
Знаходимо нулі функції. Для цього прирівнюємо похідну до нуля:  
3ƛ 2-28ƛ -20= 0  
Звідки:  
ƛ 1 = -2/3  
ƛ 2 = 10

Складемо таблицю знаків виду:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ƛ | -∞ | -2/3 | 10 | +∞ |
| Sing f(ƛ) | - | + | - | + |

Зменшимо інтервали, які мають корені.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ƛ | -2 | -2/3 | 10 | 16 |
| Sing f(ƛ) | - | + | - | + |

В результаті аналізу таблиці отримаємо три відрізка на яких функція змінює знак: [-2,-2/3], [-2/3, 10], [10, 16].

За допомогою метода Ньютона (дотичних) уточнюємо корені:

Для проміжку [10,16]

Знайдемо другу похідну:

d2F/dƛ2 = 2(3ƛ-14)

Уточнимо інтервали, в яких будуть знаходитись корні рівняння. Для цього початковий інтервал [10;16] розіб’ємо на 3 під інтервали.  
h2 = 10 + 2\*(16-10)/3 = 14  
h3 = 10 + (2+1)\*(16-10)/3 = 16

Оскільки, F(14)\*F(16) < 0 (тобто, значення функції на його кінцях мають протилежні знаки), то корінь лежить в межах [10;16].  
Обчислимо значення функції в точці a = 14  
f(14) = -278  
f''(14) = -56

Критерій зупинки ітерації:  
|f(ƛk)| < εm1  
або  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|x_%7bk%7d-x_%7bk-1%7d|%20%3C%20\sqrt%7b\frac%7b2\cdot%20\epsilon%20m_%7b1%7d%7d%7bM_%7b2%7d%7d%7d  
де M2 = max|f "(ƛ)|, m1 = min|f'(ƛ)|.  
Оскільки f(a)\*f''(a) < 0, то ƛ0 = b = 16

Решту розрахунків запишемо в таблицю.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | ƛ | F(ƛ) | dF(ƛ) | h = f(ƛ) / f'(ƛ) |
| 1 | 16 | 194 | 300 | 0.646 |
| 2 | 15.353 | 13.947 | 257.281 | 0.05421 |
| 3 | 15.298 | 0.094 | 253.814 | 0.000371 |

Відповідь: ƛ1 = 15.298 - 0.094 / 253.814 = 15.298;

Для проміжку [-2,-2/3]

Уточнимо інтервали, в яких будуть знаходитись корні рівняння. Для цього початковий інтервал [-2;-0.667] розіб’ємо на 3 під інтервали.  
h1 = -2 + 1\*(-0.667-(-2))/3 = -1.556  
h2 = -2 + (1+1)\*(-0.667-(-2))/3 = -1.111

Оскільки, F(-1.556)\*F(-1.111) < 0 (тобто, значення функції на його кінцях мають протилежні знаки), то корінь лежить в межах [-1.556; -1.111].  
Обчислимо значення функції в точці a = -1.556  
f(-1.556) = -4.533  
f''(-1.556) = -37.334

Критерій зупинки ітерації:  
|f(ƛk)| < εm1  
або  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|x_%7bk%7d-x_%7bk-1%7d|%20%3C%20\sqrt%7b\frac%7b2\cdot%20\epsilon%20m_%7b1%7d%7d%7bM_%7b2%7d%7d%7d  
де M2 = max|f "(ƛ)|, m1 = min|f'(ƛ)|.  
Оскільки f(a)\*f''(a) > 0, то ƛ0 = a = -1.556

Решту розрахунків запишемо в таблицю.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | ƛ | F(ƛ) | dF(ƛ) | h = f(ƛ) / f'(ƛ) |
| 1 | -1.556 | -4.533 | 30.819 | -0.147 |
| 2 | -1.408 | -0.4 | 25.392 | -0.0157 |
| 3 | -1.392 | -0.00453 | 24.818 | -0.000183 |

Відповідь: ƛ2 = -1.392 - (-0.00453) / 24.818 = -1.392;

Для проміжку [-0.667,10]

Уточнимо інтервали, в яких будуть знаходитись корні рівняння. Для цього початковий інтервал [-2;-0.667] розіб’ємо на 3 під інтервали.  
h0 = -0.667 + 0\*(10-(-0.667))/3 = -0.667  
h1 = -0.667 + (0+1)\*(10-(-0.667))/3 = 2.889

Оскільки, F(-0.667)\*F(2.889) < 0 (тобто, значення функції на його кінцях мають протилежні знаки), то корінь лежить в межах [-0.667;2.889].  
Обчислимо значення функції в точці a = -0.667  
f(-0.667) = 8.815  
f''(-0.667) = -32.002

Критерій зупинки ітерації:  
|f(ƛk)| < εm1  
або  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=|x_%7bk%7d-x_%7bk-1%7d|%20%3C%20\sqrt%7b\frac%7b2\cdot%20\epsilon%20m_%7b1%7d%7d%7bM_%7b2%7d%7d%7d  
де M2 = max|f "(ƛ)|, m1 = min|f'(ƛ)|.  
Оскільки f(a)\*f''(a) < 0, то ƛ0 = b = 2.889

Решту розрахунків запишемо в таблицю.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | ƛ | F(ƛ) | dF(ƛ) | h = f(ƛ) / f'(ƛ) |
| 1 | 2.889 | -148.49 | -75.849 | 1.957 |
| 2 | 0.931 | -27.946 | -43.466 | 0.642 |
| 3 | 0.288 | -4.898 | -27.816 | 0.176 |
| 4 | 0.111 | -0.412 | -23.096 | 0.0178 |
| 5 | 0.094 | -0.00437 | -22.607 | 0.000193 |

Відповідь: ƛ3 = 0.094 - (-0.00437) / (-22.607) = 0.094;

Знайдемо усі власні вектори матриці:

Для ƛ1 = 15.298

=

Для ƛ2 = -1.392

=

Для ƛ3 = 0.093

=

**Протокол розв’язку в MathLab:**

D =[3 2 -1;

2 4 1;

-1 0 -2;];

disp("Початкова матриця")

disp(D)

V = det(D);

Y0 = [0;

1;

0;];

disp("Y0 =")

disp(Y0)

Y1 = D \* Y0;

disp("Y1 =")

disp(Y1)

Y2 = D \* Y1;

disp("Y2 =")

disp(Y2)

Y3 = D \* Y2;

disp("Y3 =")

disp(Y3)

disp("Побудуємо систему")

S = [Y2,Y1,Y0]

A(1:3, 1:3) = 0;

for i = 1:3

for j = 1:3

dop = (-1)^(i+j) \* det( D([1:i-1, i+1:end], [1:j-1, j+1:end]) );

A(i, j) = dop;

end

end

disp("Матриця алгебраїчних доповнень")

disp(A)

disp("Транспонована матриця")

B = A';

disp(B)

disp("Визначник початкової матриці")

disp(V);

disp("Зворотна матриця")

Z = 1/V \* B;

disp(Z)

disp("Перевірка Z\*B = E")

Q = Z \* S;

disp(Q);

disp("Значення вектора Р")

P = Z \* (-Y3)

p = [1; P];

disp("Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо корні")

disp(p)

x=roots(p)

disp("Знайдемо усі власні вектори матриці для ƛ1 = 15.298")

q01 = 1

q11 = 1\* x(3) - p(2)

q21 = (x(3) \* q11) - p(3)

x1 = Y2 + (q11\*Y1) + (q21 \* Y0)

disp("Знайдемо усі власні вектори матриці для ƛ2 = -1.392")

q01 = 1

q11 = 1\* x(1) - p(2)

q21 = (x(1) \* q11) - p(3)

x1 = Y2 + (q11\*Y1) + (q21 \* Y0)

disp("Знайдемо усі власні вектори матриці для ƛ3 = 0.093")

q01 = 1

q11 = 1\* x(2) - p(2)

q21 = (x(2) \* q11) - p(3)

x1 = Y2 + (q11\*Y1) + (q21 \* Y0)

**Виведення в консолі:**

Trial>> metodKrilov

Початкова матриця

3 2 -1

2 4 1

-1 0 -2

Y0 =

0

1

0

Y1 =

2

4

0

Y2 =

14

20

-2

Y3 =

84

106

-10

Побудуємо систему

S =

14 2 0

20 4 1

-2 0 0

Матриця алгебраїчних доповнень

-8 3 4

4 -7 -2

6 -5 8

Транспонована матриця

-8 4 6

3 -7 -5

4 -2 8

Визначник початкової матриці

-22

Зворотна матриця

0.3636 -0.1818 -0.2727

-0.1364 0.3182 0.2273

-0.1818 0.0909 -0.3636

Перевірка Z\*B = E

1.0000 0 -0

0.0000 1.0000 0

0.0000 0 1.0000

Значення вектора Р

P =

-14

-20

2

Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо корні

1

-14

-20

2

x =

15.2988

-1.3926

0.0939

Знайдемо усі власні вектори матриці для ? ƛ1 = 15.298

q01 =

1

q11 =

14.0939

q21 =

21.3230

x1 =

42.1877

97.6985

-2.0000

Знайдемо усі власні вектори матриці для ƛ2 = -1.392

q01 =

1

q11 =

29.2988

q21 =

468.2343

x1 =

72.5975

605.4293

-2.0000

Знайдемо усі власні вектори матриці для ƛ3 = 0.093

q01 =

1

q11 =

12.6074

q21 =

2.4427

x1 =

39.2148

72.8722

-2.0000

Висновок

Можна помітити, що при знаходженні відповідей рішення системи є невеликі розбіжності. Тому, що рахуючи вручну, ми використовуємо ε = 0,001 (припустиме наближення). Якщо порівнювати відповіді отримаємо:

MathLab:

ƛ1 = 15.2988

ƛ2 = -1.3926

ƛ3 = 0.0939

Рахуючи вручну:

ƛ1 = 15.298

ƛ2 = -1.392

ƛ3 = 0.093

Література:

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

2. <http://www.mathros.net.ua/znahodzhennja-vlasnyh-znachen-matryci-za-metodom-krylova.html> 18.01.18.

3. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. (Укр. мов.) ст 68-73